Professor Carlos Eduardo

2ª Série do Ensino Médio

Disciplina: Progressão de Matemática

Números Binomiais e Binômio de Newton

- **Número binomial** é o número de subconjuntos com **p** elementos que se pode extrair de um conjunto com **n** elementos. É representado pela fórmula $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, com **n** e **p** $\in \mathbb{N}$, e $n \geq p$.
- Tem-se a igualdade entre dois números binomiais $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{q}$ quando $p = q$ ou $p + q = n$, em que **n**, **p** e **q** $\in \mathbb{N}$, $n \geq p$ e $n \geq q$. Nesse caso, $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{q}$ são números binomiais complementares.
- Segundo a **Relação de Stifel**, tem-se $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$, considerando $n \geq p$.
- No **Triângulo de Pascal**, destacam-se as seguintes propriedades:
  - Todas as linhas do Triângulo de Pascal terão seu primeiro e seu último elemento iguais a 1.
  - A soma dos elementos de uma linha de numerador **n** será igual a 2^n.
  - A soma de dois binomiais consecutivos de uma linha é igual ao binomial localizado na linha seguinte, abaixo do segundo binomial somado.
  - A soma dos números binomiais de uma mesma diagonal, desde a primeira coluna até uma coluna qualquer, é igual ao número imediatamente abaixo do último elemento somado.
- A **fórmula do desenvolvimento do Binômio de Newton** é:

  $(x+a)^n = \binom{n}{0}x^n a^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}a^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \ldots + \binom{n}{p}x^{n-p}a^p + \ldots + \binom{n}{n}x^0 a^n$, em que **x** e **a** são números quaisquer e **n** $\in \mathbb{N}$.
- O **termo geral do Binômio de Newton** é determinado por $T_{p+1} = \binom{n}{p}x^p a^{n-p}$.

Número Binomial

Sejam **n** e **p** dois números naturais quaisquer e tais que $n \geq p$. Chama-se número binomial e indica-se por $\binom{n}{p}$ o número assim definido:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \text{ com } \mathbf{n} \text{ e } \mathbf{p} \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq p$$

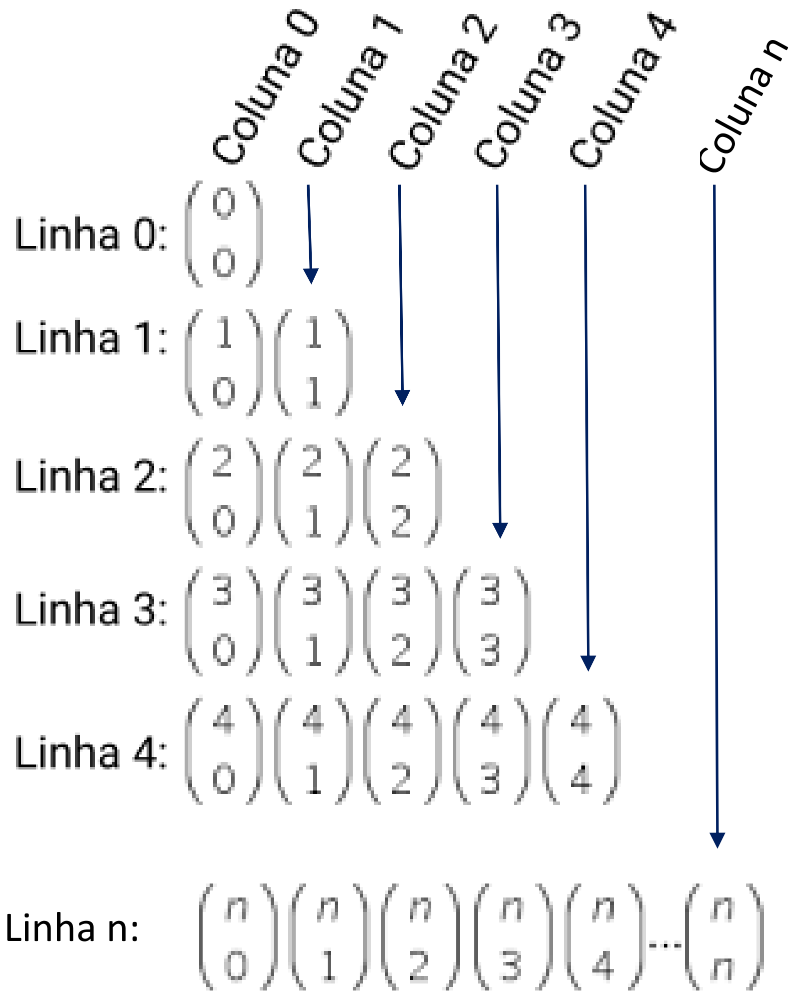
Em que **n** é chamado de numerador e **p**, de denominador do binomial.

Números Binomiais – Consequências da definição

Se $n < p$, define-se $\binom{n}{p} = 0$.

- **Consequência 1:** $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} = \dfrac{n!}{0!\,n!} = 1$
- **Consequência 2:** $\binom{n}{1} = \dfrac{n!}{1!(n-1)!} = \dfrac{n(n-1)!}{1!(n-1)!} = n$
- **Consequência 3:** $\binom{n}{n} = \dfrac{n!}{n!(n-n)!} = \dfrac{n!}{n!\,0!} = 1$

Triângulo de Pascal



1										
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Número Binomial

Binomiais consecutivos

Relação de Stifel

Dois números binomiais de mesmo numerador são consecutivos se seus denominadores forem números consecutivos.

Supondo satisfeitas as condições de existência de dois binomiais consecutivos, é válida a Relação de Stifel:

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$

Exemplo : $\binom{7}{4} + \binom{7}{5} = \binom{8}{5}$

Aplicação da Relação de Stifel na construção do Triângulo de Pascal

$$\boxed{\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}}$$

	0	1	2	3	4	5
0	$\binom{0}{0}$					
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$				
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}+$	$\binom{2}{2}$			
			=			
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$		
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}+$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$	
				=		
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$

1					
1	1				
1	2 +	1			
		=			
1	3	3	1		
1	4	6 +	4	1	
			=		
1	5	10	10	5	1

Número Binomial

Binomiais complementares

Dois números binomiais são complementares se apresentarem o mesmo numerador e se a soma de seus denominadores for igual a esse numerador.

Como consequência dessa propriedade, tem-se:

Se **n**, **p** e **q** $\in \mathbb{N}$, $n \geq p$ e $n \geq q$, então $\binom{n}{p} = \binom{n}{q} \Leftrightarrow p = q$ ou $p + q = n$.

Exemplo : $\binom{7}{2} = \binom{7}{5}$

Número Binomial – Outra propriedade

Linha 0:	1	$1 = 2^0$
Linha 1:	1 1	$1 + 1 = 2^1$
Linha 2:	1 2 1	$1 + 2 + 1 = 2^2$
Linha 3:	1 3 3 1	$1 + 3 + 3 + 1 = 2^3$
Linha 4:	1 4 6 4 1	$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 2^4$
Linha 5:	1 5 10 10 5 1	$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 2^5$

Binômio de Newton

A potência da forma $(a + b)^n$, em que **a** e **b** $\in \mathbb{R}$ e **n** $\in \mathbb{N}$, é chamada Binômio de Newton. Observe a sequência a seguir.

1					$(a + b)^0 = 1.$
1	1				$(a + b)^1 = 1a + 1b.$
1	2	1			$(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2.$
1	3	3	1		$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3.$
1	4	6	4	1	$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4.$

Observe que os coeficientes dos desenvolvimentos formam o Triângulo de Pascal. Então, é possível escrever também:

Binômio de Newton

$$(a+b)^0 = 1.$$

$$(a+b)^1 = 1a + 1b.$$

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2.$$

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3.$$

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4.$$

$$(a+b)^0 = \binom{0}{0} a^0\, b^0$$

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^1\, b^0 + \binom{1}{1} a^0\, b^1$$

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2\, b^0 + \binom{2}{1} a^1\, b^1 + \binom{2}{2} a^0\, b^2$$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3\, b^0 + \binom{3}{1} a^2\, b^1 + \binom{3}{2} a^1\, b^2 + \binom{3}{3} a^0\, b^3$$

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0} a^4\, b^0 + \binom{4}{1} a^3\, b^1 + \binom{4}{2} a^2\, b^2 + \binom{4}{3} a^1\, b^3 + \binom{4}{3} a^0\, b^4$$

...

Binômio de Newton

De modo geral, quando o expoente é **n**, pode-se escrever a fórmula do desenvolvimento do Binômio de Newton:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n\, b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n} a^0\, b^n$$

Fórmula do termo Geral

Observando os termos do desenvolvimento de $(a + b)^n$, definimos a fórmula do termo geral:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} \cdot a^{n-p} \cdot b^p$$

Essa é a fórmula do Binômio de Newton, segundo as potências decrescentes de **a**.

Observações:

- O desenvolvimento de $(a + b)^n$ possui n + 1 termos;

- A soma de todos os coeficientes do desenvolvimento de $(a + b)^n$ é igual a 2^n;

- O termo médio ou central é calculado pela expressão $T_{médio} = \frac{n}{2} + 1$, se n for par. Se n for ímpar, o desenvolvimento não tem termo médio ou central.

Exemplos de exercícios:

1. Calcule o 4° termo do desenvolvimento de $(x + 4)^5$.

Resolução:

Pela fórmula do termo geral, $T_{p+1} = \binom{n}{p} . a^{n-p} . b^p$,

temos:

p + 1 = 4 –> **p = 3**

n = 5

a = x

b = 4

$$T_{3+1} = \binom{5}{3} . x^{5-3} . 4^3$$

$$T_4 = \frac{5!}{3!\,.2!} . x^2 . 64$$

$$T_4 = \frac{5.4.3!}{3!\,.2.1} . x^2 . 64$$

$T_4 = \frac{20}{2} . x^2 . 64$ => $T_4 = 10 . x^2 . 64$ => $T_4 = 640x^2$

Exemplos de exercícios:

2. Determine o termo central do desenvolvimento de $(2x + 3)^4$.

Resolução:

No desenvolvimento teremos 4 + 1 = 5 termos, logo o termo central será o 3° termo.

p + 1 = 3 –> **p = 2**

n = 4

a = 2x

b = 3

$$T_{2+1} = \binom{4}{2}.(2x)^{4-2}.3^2$$

$$T_3 = \frac{4!}{2!.2!}.(2x)^2.9$$

$$T_3 = \frac{4.3.2!}{2!.2.1}.4x^2.9$$

$$T_3 = \frac{12}{2}.4x^2.9 \Rightarrow T_3 = 6.4x^2.9 \Rightarrow T_3 = 216x^2$$

Exemplos de exercícios:

3. Calcule o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^9$.

Áudio explicando a questão.

Resolução:

Usando a fórmula do termo geral teremos:

p = ?

n = 9

a = x^3

b = $-(x^{-2}) = (-1).x^{-2}$

Áudio explicando a transformação do 2° termo da potência

$$T_{p+1} = \binom{9}{p}.x^{9-p}.(-1.x^{-2})^p$$

$$T_{p+1} = \binom{9}{p}.x^{9-p}.(-1)^p.(x^{-2})^p$$

Multiplicação de potência de mesma base, repete a base e soma o expoente.

$$T_{p+1} = \binom{9}{p}.(-1)^p.\overbrace{x^{9-p}.x^{-2p}}$$

Para termos o termo independente o expoente de x deve ser igual a zero, logo teremos:

$$T_{p+1} = \binom{9}{p}.(-1)^p.x^{\overbrace{9-3p}}$$

9 – 3p = 0

– 3p = – 9

p = 3

Então o teremos o termo independente para p = 3 (4° termo)

Exemplos de exercícios:

3. Calcule o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^9$.

Resolução (Continuação do slide anterior):

Descobrimos que p deve valer 3 para termos o termo independente, logo:

p = 3

n = 9

a = x^3

b = $-(x^{-2}) = (-1).x^{-2}$

$$T_{3+1} = \binom{9}{3}.(-1)^3.x^{9-3.3}$$

$$T_4 = \frac{9!}{3!.6!}.(-1).x^0$$

$$T_4 = \frac{9.8.7.6!}{3.2.1.6!}.(-1).1$$

$$T_4 = \frac{3.4.7}{1}.(-1) \Rightarrow T_4 = 84.(-1) = \boxed{-84}$$

Áudio explicando